

ケーブルの自重によるたわみ（懸垂線・カテナリー）

Catenary of Cable

R02/2023/05, Abaqus6.13-1, Analysis Level:★★★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

2点間に張られたケーブルは、自重によってたわみ特定の曲線を形成する。この曲線を懸垂線（カテナリー）と呼ぶ。カテナリーの形状は、エネルギー的に最も安定な状態に相当するため、その形状を決定する問題は変分法の代表的な例題である。ここでは、ケーブルの長さが変化せず（引張力によって伸びない）、また完全にしなやか（曲げ剛性を持たない）という条件の下で解を求め、FEM解析と比較検証する。解法は初等材料力学によるものであるが、ケーブルにたわみが発生した状態での力の釣り合いを考えるため、FEM解析上は幾何学的非線形性を考慮してモデルの形状変化を反映した扱いとすることが求められる。また、伸びることなくしなやかな解析モデルを設定する工夫が必要である。

理論解 中原，実践材料力学，p.35 演習問題(14) 参照⁽¹⁾。

Fig.1 に示すような両端を支持されたケーブルが自重によってたわみ、そのたわみ量が与えられているとき、発生している応力とケーブルの全長を求める。なお、ケーブルの断面寸法に比べて長さが非常に大きいため、ケーブルは完全にしなやか、すなわち曲げに対する抵抗を生じないとする。またケーブルには引張力を生じて自重と釣り合っているが、引張力による伸びは無いものとする。諸元は以下の通りである。

ケーブルが張られている支持点間の距離（スパン） $l = 100$ [m]

ケーブルの直径 $d = 2$ [mm]

中央におけるケーブルのたわみ量 $\delta = 1$ [m]

ケーブルの単位体積あたりの重量（銅を想定） $\gamma = 86.5 \times 10^{-6}$ [N/mm³]

材料力学による解は以下の通りである。

1. OB 上の任意点 C に作用する水平分力を H ，垂直分力を V とし、引張力 P (軸力) を求める。

$$V_1 = \frac{ql}{2} \quad \dots (1) \quad (q: \text{ケーブル単位長さの重さ})$$

$$V = qx \quad \dots (2) \quad (\text{ケーブル OC に作用する力の垂直方向の釣り合い})$$

$$H = H_1 \quad \dots (3) \quad (\text{ケーブル BC に作用する力の水平方向の釣り合い})$$

2. すなわち、ケーブル上各点に作用する引張力の水平分力は一定である。

$$P = \sqrt{H^2 + (qx)^2} \quad \dots (4)$$

3. ケーブルの引張力は固定端 ($x = l/2$) で最大になり

$$P_{\max} = P_1 = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2} \quad \dots (5)$$

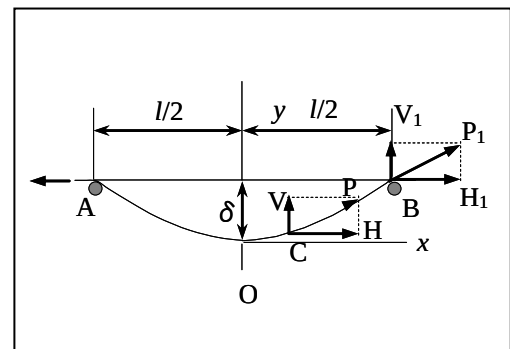


Fig.1 両端を支持されたケーブルの自重によるたわみ

4. たわみを求めるために、ケーブル OB に作用する力の O 点に関するモーメントの釣合いを考えると

$$H\delta - \frac{1}{2}V_1 + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \therefore \delta = \frac{ql^2}{8H} \quad \dots (6)$$

5. (5)式に代入すると

$$P_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{ql^2}{8\delta}\right)^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2} = \frac{ql}{8\delta} \sqrt{l^2 + 8\delta^2} = \frac{\gamma Al}{8\delta} \sqrt{l^2 + 8\delta^2} \quad \dots (7)$$

6. ゆえに、最大応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{A} = \frac{\gamma l}{8\delta} \sqrt{l^2 + 8\delta^2} = \frac{86.5 \times 10^3 \times 100}{8 \times 1} \sqrt{100^2 + 8 \times 1^2} = 108 \text{ [MPa]} \quad \dots (8)$$

7. 次に、ケーブルの全長 L を求める。ケーブルの微小な長さを ds とすると、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \dots (9)$$

8. ケーブルのたわみが小さいならば (dy/dx) もまた小さいので、

$$L = 2 \int_0^{l/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} dx \doteq 2 \int_0^{l/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad \dots (10)$$

9. ここで

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{qx}{H} \quad \dots (11)$$

10. ゆえに

$$L = 2 \int_0^{l/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{H} \right)^2 \right\} dx = l \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{\delta^2}{l^2} \right) = 100 \left(1 + \frac{8}{3} \times \frac{1^2}{100^2} \right) = 100.027 \text{ [m]} \quad \dots (12)$$

11. スパンが 100 [m] であることから、スパンより 27 [mm] だけ長いケーブルをたわませている。

解析条件

Fig.2 に解析モデルを示す。

■ 要素：平面はり要素 B21

■ 材料定数：ヤング率 CASE-1 $E_1 = 1.25 \times 10^5$ [MPa]

CASE-2 $E_2 = E_1 \times 100 = 1.25 \times 10^7$ [MPa]

ポアソン比 $\nu = 0$

質量密度 $\rho = 8.827 \times 10^{-9}$ [ton/mm³]

*単位に注意：SI 単位系において、力に N、長さに mm を採用した場合、質量密度の入力にはこの単位を使用する。

■ 荷重：Phase1 自重負荷 ($L=100.027$ [m])

Phase2 スパン長に調整 ($L=100.000$ [m])

ケーブルの問題は、初期が不安定（初期は横剛性を持っていないため）なので、最初の荷重は微小とする。

解析結果

Fig.3, 4 に Abaqus の解析結果を示す。また得られた結果をまとめて Table.1 に示す。ここではケーブルのヤング率を変えて 2 ケースの解析を行った。CASE-1 は材料として銅を想定した値、CASE-2 はその 100 倍の値である。

理論解ではケーブルの伸びを考慮していないが、実際に解析すると伸びの影響を無視することができず、CASE-1 に示すように理論解の約 1.7 倍のたわみ量が得られた。CASE-2 のようにヤング率を 100 倍程度にすれば、この差異

を解消することができるが、実機では CASE-1 の解が妥当と考えられるので注意が必要である。

なお、曲げ剛性のないケーブルをモデル化するためには、トラス要素を用いるのが良さそうであるが、反面、トラス要素は引張応力が作用していない状態（幾何学的非線形性が現れていない初期の状態）では、横荷重に対する剛性を一切持たないため解析が不安定になりやすい。そこで今回は、はり要素を適用した。

はり要素は曲げ剛性を有するが、今回設定した断面寸法が十分に小さいため、完全にしなやかであるという仮定を損なわない結果となった。CASE-2 ではヤング率を増加させているが、それでも曲げ剛性の影響は小さいと見られる。

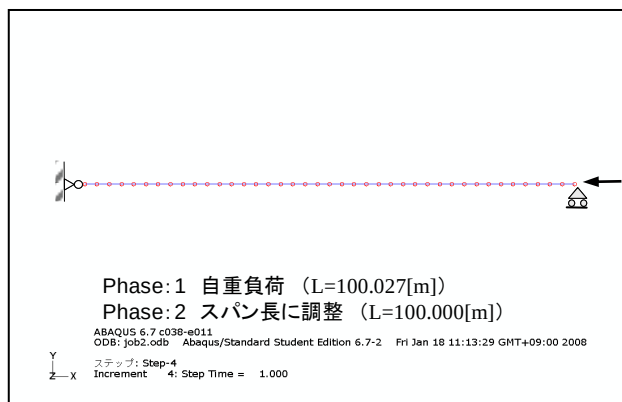


Fig.2 解析モデル

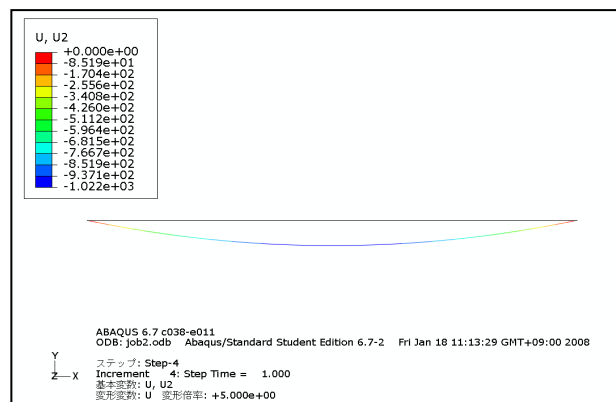


Fig.3 ケーブルのたわみ
Y 方向変位 δ (CASE-2)

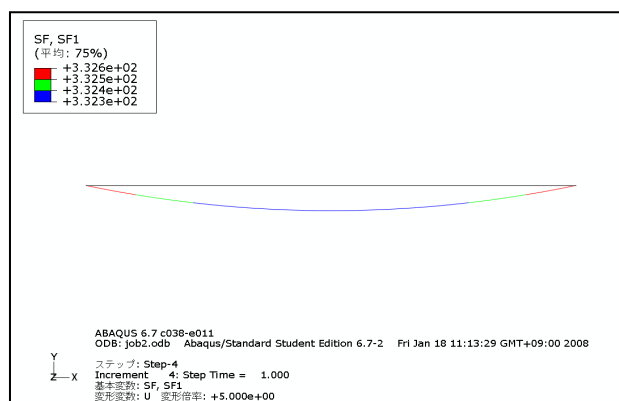


Fig.4 ケーブルの軸力(CASE-2)

Table.1 理論解と解析結果の比較

	理論解	FEM解	
		CASE 1	CASE 2
中央の変位 [m]	1.00	1.71	1.02
最大応力 [MPa]	108.0	63.6	106.0

参考文献

- (1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です。

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail : comm@mech-da.co.jp <https://www.mech-da.co.jp>

Mechanical Design & Analysis Corporation